Matematický KLOKAN 2009

www.matematickyklokan.net

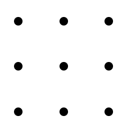
kategorie **Junior**

Úlohy za 3 body

1. Hodnota kterého výrazu je číslo dělitelné třemi?

(A) 2 009 (B) $2 + 0 + 0 + 9$ (C) $(2 + 0)(0 + 9)$
(D) 200^9 (E) $200 - 9$

2. Určete nejmenší počet bodů, které musíme odstranit z obrázku, aby žádné tři body neležely na jedné přímce?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 7

3. Maratonu se účastnilo 2 009 běžců. Počet běžců, které Vašek porazil, je třikrát větší než počet běžců, kteří porazili Vaška. Na kolikátém místě Vašek doběhl?

(A) 503 (B) 501 (C) 500 (D) 1 503 (E) 1 507

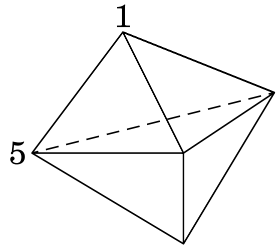
4. Kolik je $\frac{1}{2}$ ze $\frac{2}{3}$ ze $\frac{3}{4}$ ze $\frac{4}{5}$ z $\frac{5}{6}$ z $\frac{6}{7}$ ze $\frac{7}{8}$ z $\frac{8}{9}$ z $\frac{9}{10}$ z 1 000?

(A) 250 (B) 200 (C) 150 (D) 100 (E) 50

5. Číslo 2 009 bylo napsáno 2 009krát za sebou. Součet všech lichých číslic, které předcházejí některé sudé číslici, je roven:

(A) 9 (B) 18 (C) 4 018 (D) 18 072 (E) 18 081

6. Na obrázku je těleso, jehož povrch je tvořen šesti trojúhelníky. Každému vrcholu je přiřazeno nějaké číslo. Součet tří čísel při vrcholech v každé stěně je stejný. Určete součet všech pěti čísel ve vrcholech tělesa, jsou-li dvě z daných čísel rovny 1 a 5 (viz obrázek).

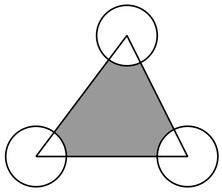


(A) 9 (B) 12 (C) 17 (D) 18 (E) 24

7. Kolik kladných celých čísel má tu vlastnost, že jejich druhá a třetí mocnina jsou zapsány stejným počtem číslic?

(A) 2 (B) 3 (C) 4
(D) 9 (E) nekonečně mnoho

8. Obsah trojúhelníku na obrázku je $80\,\text{cm}^2$, poloměry všech tří kružnic se středy ve vrcholech trojúhelníku jsou 2 cm. Určete obsah vybarvené plochy (v cm^2).



(A) 76 (B) $80 - 2\pi$ (C) $40 - 4\pi$ (D) $80 - \pi$ (E) 78π

Úlohy za 4 body

9. V každém testu může student získat 0, 1, 2, 3, 4 nebo 5 bodů. Po čtyřech testech byl Sářin průměr 4 body. Které z následujících tvrzení nemůže být pravdivé?

(A) Sára získala v každém testu 4 body.
(B) Právě ve dvou testech získala Sára po 3 bodech.
(C) Právě ve třech testech získala Sára po 3 bodech.
(D) Pouze v jednom testu získala Sára 1 bod.
(E) Právě ve dvou testech získala Sára po 4 bodech.

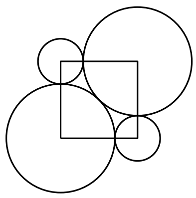
10. Na ostrově lhářů a pravdomluvných stálo ve frontě na banány 25 lidí. Všichni kromě prvního v řadě řekli, že osoba, která stojí před nimi, je lhář. První člověk v řadě prohlásil, že všichni, kteří stojí za ním, jsou lháři. Kolik lhářů stálo v řadě?

(A) 0 (B) 12 (C) 13
(D) 24 (E) nelze rozhodnout

11. Definujme $a \triangle b = ab + a + b$. Jestliže $3 \triangle 5 = 2 \triangle x$, pak x je rovno:

(A) 3 (B) 6 (C) 7 (D) 10 (E) 12

12. Dvě velké a dvě malé kružnice mají středy ve vrcholech čtverce a vzájemně se dotýkají (viz obrázek). Určete poloměr velké kružnice, jestliže poloměr malé kružnice je 1 cm.



(A) $2,5\,\text{cm}$ (B) $\sqrt{5}\,\text{cm}$ (C) $1 + \sqrt{2}\,\text{cm}$
(D) $2,25\,\text{cm}$ (E) $2,4\,\text{cm}$

13. Kolik existuje celých čísel n takových, že vzdálenost na reálné ose mezi čísly $\sqrt{n}$ a 10 je menší než jedna?

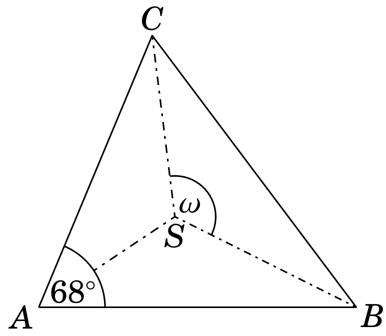
(A) 19 (B) 20 (C) 39 (D) 40 (E) 41

14. David napsal do řady několik navzájem různých celých kladných čísel ne větších než 10. Pro každou dvojici sousedních čísel navíc platí, že jedno číslo je násobkem toho druhého. Určete největší možný počet čísel v řadě.

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

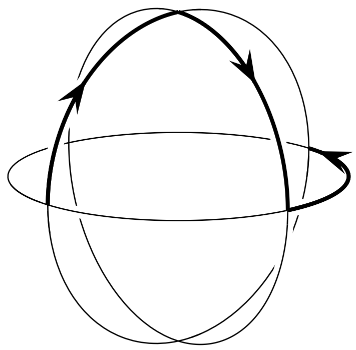
15. Osy vnitřních úhlů trojúhelníku se protínají v bodě S. Určete velikost úhlu ω (viz obrázek).

(A) 120° (B) 124° (C) 128° (D) 132° (E) 136°



16. Tři kruhové obruče jsou spojeny podle obrázku. V jednom ze spojů přistála moucha a pohybuje se po obručích následujícím způsobem: přejde čtvrt obruče a zahne doprava, pokračuje k dalšímu spoji a odbočí doleva. Určete nejmenší počet čtvrtobručí, které moucha přejde, než se vrátí na spoj, na který původně přistála?

(A) 6 (B) 9 (C) 12 (D) 15 (E) 18



Úlohy za 5 bodů

17. Kolik nul mohu nahradit za $*$ v desetinném zápise čísla 1,$*$1 tak, abych získal číslo, které bude větší než $\dfrac{20009}{20008}$, ale menší než $\dfrac{2009}{2008}$?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

18. Všechny přirozené dělitele čísla N různé od čísla N a 1 jsme seřadili od nejmenšího po největšího. Víme, že největší dělitel v řadě je 45krát větší než ten nejmenší. Kolik takových čísel N existuje?

(A) 0 (B) 1 (C) 2
(D) 3 (E) nekonečně mnoho

19. Nechť $a = 2^{25}$, $b = 8^8$ a $c = 3^{11}$, pak platí:

(A) $a < b < c$ (B) $b < a < c$ (C) $c < b < a$ (D) $c < a < b$ (E) $b < c < a$

20. Několik kusů ovoce čtyř druhů (pomeranče, broskve, jablka a fíky) máme položit do řady tak, aby každé dva druhy ovoce spolu sousedily. Určete nejmenší počet kusů ovoce, které potřebujeme.

(A) 5 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 11

21. Najděte nejmenší počet čísel, které musí být odebrány z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 16\}$ tak, aby součet žádných dvou ze zbývajících čísel nebyl druhou mocninou přirozeného čísla.

(A) 10 (B) 9 (C) 8 (D) 7 (E) 6

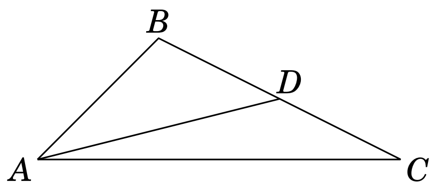
22. Určete nejmenší přirozené číslo n takové, aby hodnota výrazu $(2^2 - 1) \cdot (3^2 - 1) \cdot (4^2 - 1) \cdot \ldots \cdot (n^2 - 1)$ byla druhou mocninou přirozeného čísla.

(A) 6 (B) 8 (C) 16
(D) 27 (E) takové číslo neexistuje

23. Klokan, sedící v počátku souřadného systému, může skákat pouze ve směru osy x nebo ve směru osy y (v kladném i záporném směru). Každý jeho skok měří přesně jednu jednotku. Na kolika bodech souřadného systému může skončit po deseti skocích?

(A) 100 (B) 121 (C) 256 (D) 400 (E) 441

24. Nechť AD je těžnice trojúhelníka ABC (viz obrázek). Víme, že $|\sphericalangle ACB| = 30°$ a $|\sphericalangle ADB| = 45°$. Určete velikost úhlu BAD.



(A) 45° (B) 30° (C) 25° (D) 20° (E) 15°